



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>

QC
385
S9

UC-NRLF



QB 24 488

YC 11199

LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY OF CALIFORNIA.

RECEIVED BY EXCHANGE

Class

371

Astigmatische Spiegelung im dreiaxigen Ellipsoid.

Inaugural-Dissertation

zur

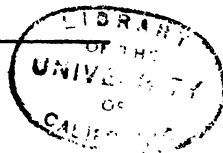
Erlangung der Doktorwürde

der

hohen philosophischen Fakultät der Landes-Universität Rostock

vorgelegt von

Friedrich Syrup,
Diplom-Ingenieur aus Hannover.



ROSTOCK.

Ww. B. Winterberg's Buchdruckerei

1905.

11385

89

Referent: Herr Prof. Dr. Wachsmuth.

Meiner Mutter
in Liebe und Dankbarkeit zugeeignet.

166179

Inhaltsverzeichnis.

1) Einleitung	7—10
2) Neumannsche Formeln und ihre Umformungen . .	11—18
3) Präzisierung des Problems	18—20
4) Mathematische Ableitungen.	20—30
5) Rechnerische Behandlung der Aufgabe	30—39
6) Bemerkungen zu den Tabellen und Tafeln . . .	40—41
7) Betrachtungen der Ergebnisse der Untersuchungen .	41—45
8) Tafeln I—V.	



Einleitung.

Bei der Spiegelung und Brechung einer Gruppe von Strahlen, welche während ihres ganzen Verlaufes um ein unendlich geringes von der Richtung eines bestimmten, als festliegend gedachten, zentralen Strahles abweichen, in einer sphärischen Fläche, haben wir von vornherein zu unterscheiden, ob wir es in diesem Falle mit senkrechter oder schiefer Incidenz zu tun haben.

Die senkrechte Incidenz bildete den Gegenstand der „dioptrischen Untersuchungen von Gauss (Göttingen 1841). Gauss legte hierbei folgende Beschränkungen zu Grunde:

1) Die Krümmungsmittelpunkte der sphärisch zentrierten Flächen liegen auf einer Geraden, der optischen Axe, d. h. der Verbindungslinie des leuchtenden Punktes mit dem Krümmungsmittelpunkt der spiegelnden Fläche.

2) Alle leuchtenden Strahlen sind sehr dünn und verlaufen in unmittelbarer Nähe der optischen Axe, sodass die Einfallswinkel und Brechungswinkel verschwindend klein werden.

3) Die einfallenden Strahlen sind homozentrisch, gehen also von einem leuchtenden Punkte aus.

Schwieriger gestalten sich die Betrachtungen für die schiefe Incidenz, d. h. für das Einfallen homozentrischer Strahlenbündel in messbarer Entfernung von der optischen Axe. Die allge-

meinen Grundlagen für die hierbei auftretenden Erscheinungen findet man in den grösseren Lehrbüchern der Physik.^{1 2}

Der erste, welcher sich erfolgreich mit diesen katoptischen Anamorphosen beschäftigt hat, scheint der chursächsische Hofmechanikus Leopold gewesen zu sein, welcher seine Betrachtungen, die allerdings nur das Ergebnis gelungener Versuche sein dürften, in einer 1713 erschienenen Abhandlung „Anamorphosa mechanica nova“ veröffentlicht hat.

Das Verdienst, die Erscheinungen bei schiefer Incidenz in gekrümmten Flächen zuerst beobachtet und mathematisch begründet zu haben, gebührt dem Mathematiker Jacques Sturm.³

Sturm wies nach, dass die von einem leuchtenden Punkte ausgehenden homozentrischen Strahlen nach der Spiegelung in einer sphärischen Fläche bei schiefer Incidenz nicht mehr homozentrisch bleiben, sondern dass sphärische Aberrationen auftreten.

Das gesamte auf die sphärische Fläche fallende Strahlenbündel lässt sich in zwei Scharen ebener Bündel zerlegen. Beide Arten der ebenen Bündel schneiden sich in je einer Brennlinie; doch liegen die Brennlinien der Bündel erster Art in der Ebene der Bündel zweiter Art und umgekehrt.

Sämtliche gebrochenen Strahlen gehen nun durch diese beiden sich kreuzenden, unendlich kleinen Brennlinien und erleiden insofern eine Modifikation, als sie in der Nähe des Bildes einen tetraedrischen Raum ausfüllen.

Diese Art von Strahlenvereinigung bezeichnet man mit dem Namen „Astigmatismus“ und nennt ein solches Strahlenbündel

¹) Müller-Pouillet: Lehrbuch der Physik. Neunte Auflage. Braunschweig 1897.

²) Heath: A treatise on geometrical Optics. Cambridge 1887. Deutsche Ausgabe von Kanthaek. Berlin 1894.

³) Sturm: Mémoire sur l'optique. Poggend. Ann. 1845. p. 116. 374.

ein astigmatisches. Den Gegensatz hierzu bildet der Stigmatismus oder Aplanatismus, der die Eigenschaft der Lichtstrahlen bezeichnet, nach der Spiegelung oder Brechung sich wieder in einem Punkte zu vereinigen.

Zur Berechnung der Entfernungen und Lagen der beiden Brennlinien hatte Sturm in seiner oben erwähnten Schrift zuerst Gleichungen aufgestellt, in welchen er die Objekt- und Bild-Abstände auf rechtwinklige Koordinaten bezog.

Eine wesentliche Vereinfachung und Erweiterung dieser Theorien brachte eine im Jahre 1867 erscheinende Schrift von Rensch⁴ durch die Einführung der Abscissen konjugierter Punkte auf den Lichtstrahlen selbst und durch Einführung des Incidenzpunktes als Anfangspunkt der Koordinaten.

Weiter sind dann von Carl Neumann⁵ und Ludwig Matthiessen^{6, 7, 8} eingehende Untersuchungen angestellt über die Lage der Brennlinien eines unendlich dünnen Strahlenbündels zu einander und zum Axenstrahl. Sturm wies nach, dass die von einem Punkte ausgehenden Strahlen Brennlinien erzeugten, welche senkrecht zum Hauptstrahl stehen und in zu einander senkrechten Ebenen liegen, den sogenannten Fokalebene. Dieser

⁴) Rensch: Reflektion und Brechung des Lichtes in sphärischen Flächen. Poggend. Ann. 1867 p. 497:

⁵) Neumann: Brechung sehr dünner Strahlenbündel. Bericht der sächs. Gesellsch. d. Wissensch. Math. phys. Klasse 1860. p. 53.

⁶) Matthiessen: Untersuchungen über die Lage der Brennlinien eines unendlich dünnen Strahlenbündels. Akta math. Mittag-Leffler IV. (1884). Schlömilch's Zeitschrift für Math. u. physik. 33 p. 167 (1888).

⁷) Matthiessen: Über den Astigmatismus von Strahlenbündeln bei schiefer Incidenz. Eversbusch. Berlin. Zeitschrift für vergl. Augenheilkunde VI. § 39 (1889).

⁸) Matthiessen: Über die Bedingungs-gleichungen der aplanetisch. Brechung. . . . Leipzig. Annalen der Physik 1942. Band 2. p. 691.

Ansicht schloss sich Kummer an, während Neumann und Matthiessen auf Grund ihrer Untersuchungen zu dem Schluss kamen, dass die Brennlinien nicht senkrecht zum Hauptstrahl stehen, sondern im allgemeinen schiefe Winkel mit diesem bilden.

In den meisten der erwähnten Arbeiten wurde als spiegelnde resp. brechende sphärische Fläche die einfachste, nämlich die Kugelfläche angenommen. Ergänzend möge hierzu noch das gemeinsame Werk von Engel und Schellbach „Darstellende Optik“⁹⁾ angeführt werden, deren Anamorphosen jedoch unter der Voraussetzung entstanden, dass ein leuchtender Punkt in einer spiegelnden sphärischen Fläche stets nur ein Spiegelbild hat. Eine Annahme, welche alle nicht paraxiale Strahlen, d. h. alle Strahlen parallel und in unendlicher Nähe der Axe, von der Betrachtung ausschliesst.

Im Gegensatz zu allen diesen speziellen Fällen beziehen sich die von Karl Neumann aufgestellten Formeln auf die Brechung in beliebig gekrümmten Flächen.

⁹⁾ Engel u. Schellbach: Darstellende Optik. Halle 1856. F. W. Schmidt.

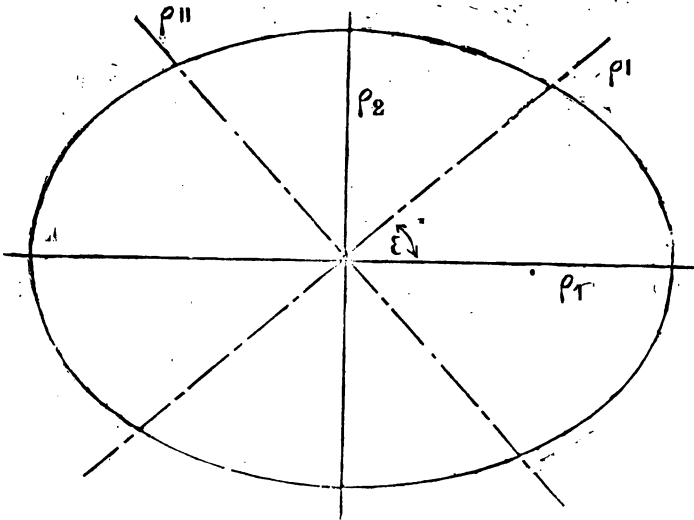
Die Neumannschen Formeln über die Brechung und Spiegelung in beliebig ge- krümmten Flächen.

Die vorliegende Arbeit soll sich mit der Theorie der Spiegelung im dreiaxigen Ellipsoid beschäftigen. Indem wir von der allgemeinen Form der *L. Neumannschen* Gleichungen ausgehen, wollen wir die Gleichungen derartig vereinfachen, wie es bei der vorliegenden Aufgabe nötig ist, um sie rechnerisch verwenden zu können.

Unbeschadet, ob wir Stigmatismus oder Astigmatismus vor uns haben, geht die Spiegelung resp. Brechung in der Einfallsebene vor sich, d. h. in der Ebene, welche durch den *Axenstrahl* des unendlich dünnen Strahlenbündels und das Einfallslot bestimmt ist.

Im Einfallspunkt des Lichtstrahls auf die sphärische Fläche denken wir uns an diese eine Tangentialebene gelegt und parallel zu derselben in unendlicher Nähe eine zweite Ebene. Dann schneidet diese Parallelebene von der spiegelnden sphärischen Fläche eine kleine Kuppe ab. Die Spitze dieser Kuppe ist der

Incidenzpunkt, die Basis ein unendlich kleiner sogenannter Dupinscher Kegelschnitt.



Ganz allgemein bezeichnet man irgend eine durch die Normale einer krummen Fläche gehende Ebene mit Normalschnitt und versteht unter dem Haupt- und Nebennormalschnitt die beiden aufeinander senkrechten Ebenen, für welche der Krümmungshalbmesser seinen grössten resp. kleinsten Wert erreicht.

Das nebenstehende krumme Flächenelement besitzt zwei Hauptkrümmungsradien $\rho_1 \rho_2$, welche sich im Incidenzpunkte schneiden. Erstens den Krümmungsradius ρ_1 des Hauptnormalenschnittes, welcher durch den Hauptstrahl des Bündels und die Normale im Incidenzpunkt gelegt ist, und zweitens den Krümmungsradius ρ_2 , welcher im Nebennormalschnitt liegt. Ausserdem wird im allgemeinen die sphärische Kuppe durch die Einfallebene und der dazu durch die Normale gelegten senkrechten Ebene

in Normalbogen geschnitten, deren Krümmungsradien ρ' und ρ'' zu den beiden Hauptkrümmungsradien ρ_1 und ρ_2 in einer bestimmten Beziehung stehen, die durch das Aziment ε der Einfallsebene gegenüber dem Hauptnormalschnitt gegeben ist.

Der von Euler aufgestellte Satz lautet: Für irgend einen Normalschnitt, dessen Ebene mit der Ebene des zu ρ_1 gehörigem Hauptnormalschnitt den Winkel ε bildet, ist:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\cos^2 \varepsilon}{\rho_1} + \frac{\sin^2 \varepsilon}{\rho_2}$$

Für unseren Fall angewandt, bestimmt sich ρ' und ρ'' als:

$$\frac{1}{\rho'} = \frac{\cos^2 \varepsilon}{\rho_1} + \frac{\sin^2 \varepsilon}{\rho_2}$$

$$\frac{1}{\rho''} = \frac{\sin^2 \varepsilon}{\rho_1} + \frac{\cos^2 \varepsilon}{\rho_2}$$

Auf diese Krümmungsradien bauen sich die Neumannschen Formeln auf, welche in der Katoptrik und Dioptrik wegen der Möglichkeit ihrer Anwendung bei jedem astigmatischen Problem eine grosse Bedeutung erworben haben.

Das einfallende a priori astigmatische Strahlenbündel habe die beiden Objektdistanzen x_0 und ξ_0 der beiden Brennlinien b_1 und b_2 mit dem Azimute ϑ_1 der Fokalebene Σb_1 . Das gebrochene astigmatische Strahlenbündel habe die Bildabstände x_1 und x_2 der beiden Brennlinien a_1 und a_2 , mit dem Azimute ρ_2 der Fokalebene Σa_1 . Ferner wurde der Einfallswinkel ε_2 und der Brechungswinkel ε_1 genannt.

Die Hauptaufgabe, zu deren Lösung die Neumannschen Formeln herangezogen werden, besteht nun darin, bei gegebener Konstitution eines einfallenden Strahlenbündels, die der gebrochenen Strahlen zu finden.

Die Aufgabe löst Karl Neumann durch folgende Gleichungen:

$$\text{I a } \mathcal{H} \left[-\cos^2 \varepsilon_2 \left(\frac{\cos^2 \vartheta_1}{x_0} + \frac{\sin^2 \vartheta_1}{\xi_0} \right) + \frac{\sin \varepsilon_2}{\sin \varepsilon_1} \cos^2 \varepsilon_1 \right. \\ \left. \left(\frac{\cos^2 \vartheta_1}{x_2} + \frac{\sin^2 \vartheta_2}{x_1} \right) \right] = 1$$

$$\text{II a } \mathcal{B} \left[-\left(\frac{\sin^2 \vartheta_1}{x_0} + \frac{\cos^2 \vartheta_1}{\xi_0} \right) + \frac{\sin \varepsilon_2}{\sin \varepsilon_1} \right. \\ \left. \left(\frac{\cos^2 \vartheta_2}{x_1} + \frac{\sin^2 \vartheta_2}{x_2} \right) \right] = 1$$

$$\text{III a } \mathcal{C} \left[-\frac{\cos \varepsilon_2 \sin 2 \vartheta_1}{\sin 2 \varepsilon} \left(\frac{1}{x_0} - \frac{1}{\xi_0} \right) + \right. \\ \left. \frac{\sin \varepsilon_2 \cos \varepsilon \sin 2 \vartheta_2}{\sin \varepsilon_1 \sin 2 \varepsilon} \left(\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} \right) \right] = 1$$

In diesen Gleichungen ist:

$$\mathcal{H} = \frac{\rho_1 \rho_2 \sin \varepsilon_1}{(\rho_2 \cos^2 \varepsilon + \rho_1 \sin^2 \varepsilon) \sin (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}$$

$$\mathcal{B} = \frac{\rho_1 \rho_2 \sin \varepsilon_1}{(\rho_2 \sin^2 \varepsilon + \rho_1 \cos^2 \varepsilon) \sin (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}$$

$$\mathcal{C} = \frac{\rho_1 \rho_2 \sin \varepsilon_1}{(\rho_1 - \rho_2) \sin (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}$$

Bei diesen Formeln ist vorausgesetzt: Der Einfallspunkt des Strahlenbündels sei der Koordinatenanfang und die Abscissen der konjugierten Punkte liegen auf den Strahlen. Zur Bestimmung der Vorzeichen geht man von der Übereinkunft aus, dass man die Abscissen auf dem Strahl vor der spiegelnden Fläche positiv, hinter der spiegelnden Fläche negativ einführt. Dem Krümmungsradius giebt man das positive Vorzeichen, wenn der einfallende Strahl auf eine konvexe Fläche, das negative, wenn er auf eine konkave Fläche fällt.

Statt des allgemeinen Falles, für welchen obige Gleichungen gelten, wo wir es von vornherein mit astigmatischem Lichte zu tun haben, können wir in unserem Falle homozentrische Strahlen annehmen, sodass sich die beiden Brennlinien a_1 und a_2 in einem Brennpunkte vereinigen und die Objektdistanzen x_0 und ξ_0 identisch werden. Hierdurch lassen sich die Gleichungen folgendermassen vereinfachen:

$$\text{Ib. } \frac{\rho_1 \rho_2 \sin e_1}{(\rho_2 \cos^2 \varepsilon + \rho_1 \sin^2 \varepsilon) \sin(e_2 - e_1)} \left[\frac{\cos^2 e_2}{x_0} + \frac{\sin e_2 \cos^2 e_1}{\sin e_1} \left(\frac{\cos^2 \vartheta_2}{x_2} + \frac{\sin^2 \vartheta_2}{x_1} \right) \right] = 1$$

$$\text{IIb } \frac{\rho_1 \rho_2 \sin e_1}{(\rho_2 \sin^2 \varepsilon + \rho_1 \cos^2 \varepsilon) \sin(e_2 - e_1)} \left[\frac{1}{x_0} + \frac{\sin e_2}{\sin e_1} \left(\frac{\sin^2 \vartheta_2}{x_2} + \frac{\cos^2 \vartheta_2}{x_1} \right) \right] = 1$$

$$\text{IIIb } \frac{\rho_1 \rho_2 \sin e_1}{(\rho_1 - \rho_2) \sin(e_1 - e_2)} \frac{\sin e_2 \cos e_1 \sin^2 \vartheta_2}{\sin e_1 \sin^2 \varepsilon} \left(\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} \right) = 1$$

Bei unserer Aufgabe hatten wir uns die Beschränkung gestellt, dass der leuchtende Punkt in der grossen Axe liegt. Mit-hin wird für die beiden Hauptmeridiane, welche die grosse Axe enthalten, das Azimut ε gleich 0. Es fallen also in den Fällen Einfallsebene und Hauptnormalschnitt zusammen.

Durch diese Vereinfachung verschwindet dann die dritte Gleichung. Ausserdem wird das Azimut ϑ_2 gleich 90° d. h. die Brennlinie b_1 steht senkrecht zur Einfallsebene.

Unsere beiden umgeformten Gleichungen lauten dann:

$$\text{I c } \frac{-\rho_1 \sin e_1}{\sin(e_2 - e_1)} \left\{ -\frac{\cos e_2}{x_0} + \frac{\sin e_2}{\sin e_1} \right. \\ \left. \cos^2 e_1 \left(\frac{\cos^2 \delta_2}{x_2} + \frac{\sin^2 \delta_2}{x_1} \right) = 1 \right.$$

$$\text{II c } \frac{-\rho_2 \sin e_1}{\sin(e_2 - e_1)x_0} + \frac{\rho_2 \sin e_2}{\sin(e_2 - e_1)} \left(\right. \\ \left. \left(\frac{\sin^2 \delta_2}{x_2} + \frac{\cos^2 \delta_2}{x_1} \right) = 1 \right.$$

Alle von Karl Neumann aufgestellten Gleichungen bezogen sich auf die Vorgänge bei der Brechung, mithin gelten auch die von uns vereinfachten Gleichungen für die Brechung. Für die Spiegelung tritt insofern eine Modifikation ein, als in diesem Falle $n = -1$ also $\sin e_1 = -\sin e_2$ wird.

Da nun ausserdem, wie oben begründet, in unserem Falle $\varepsilon = 0$ wird, so ergeben sich für die Spiegelung in den Hauptmeridianen (a b) und (a c) folgende vereinfachte Gleichungen:

$$\text{I d } \frac{\rho_1 \cos e_2}{2} \left(\frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_1} \right) = 1$$

$$\text{II d } \frac{\rho_2}{2 \cos e_2} \left(\frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_2} \right) = 1 \text{ oder}$$

$$\frac{\rho_1 \cos e_2}{2 x_0} + \frac{\rho_1 \cos e_2}{2 x_1} = 1$$

$$\frac{\rho_2}{2 \cos e_2 x_0} + \frac{\rho_2}{2 \cos e_2 x_2} = 1$$

Wir lösen diese beiden Gleichungen nach den beiden in ihnen vorkommenden Unbekannten auf und erhalten für den Hauptnormalschnitt:

$$x_1 = \frac{x_0 \rho_1 \cos e_2}{2 x_0 - \rho_1 \cos e_2}$$

und für den Nebennormalschnitt:

$$x_2 = \frac{x_0 \rho_2}{2 \cos e_2 x_0 - \rho_2}$$

Während sich die letzten vereinfachten Formeln aus der Beziehung $\varepsilon = 0$, welche für die Hauptmeridiane ab und ac des Ellipsoids zutrifft, ergaben, müssen wir der für die Spiegelung notwendigen Umformung in Bezug auf den Hauptmeridian (bc) die Neumannschen Formeln in der Form Ib, IIb, IIIb zu Grunde legen.

Diese Formeln gehen dann über in:

$$\text{Ie } \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_2 \cos^2 \varepsilon + \rho_1 \sin^2 \varepsilon} \left[\frac{\cos e_2}{2 x_0} + \frac{\cos e_2}{2} \left(\frac{\cos \vartheta_2^2}{x_2} + \frac{\sin^2 \vartheta_2}{x_1} \right) \right] = 1$$

$$\text{IIe } \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_2 \sin^2 \varepsilon + \rho_1 \cos^2 \varepsilon} \left[\frac{1}{2 x_0 \cos e_2} + \frac{1}{2 \cos e_2} \left(\frac{\sin^2 \vartheta_2}{x_2} + \frac{\cos^2 \vartheta_2}{x_1} \right) \right] = 1$$

$$\text{IIIe } \frac{\rho_1 \rho_2 \sin 2 \vartheta}{2 (\rho_1 - \rho_2) \sin 2 \varepsilon} \left(\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1} \right) = 1$$

Jetzt wollen wir die Annahme machen, dass $\vartheta_2 = 90^\circ$ wird, d. h. dass die Brennlinie senkrecht zur Einfallsebene steht. Diese Annahme erhält durch die von Sturm und Kummer geführten Beweise ihre Berechtigung.

Nunmehr vereinfachen sich die obigen Gleichungen in:

$$\text{If } \frac{\rho_1 \rho_2 \cos e_2}{2 (\rho_1 \sin^2 \varepsilon + \rho_2 \cos^2 \varepsilon)} \left[\frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_1} \right] = 1$$

$$\text{IIIf } \frac{\rho_1 \rho_2}{2 \cos e_2 (\rho_2 \sin^2 \varepsilon - \rho_1 \cos^2 \varepsilon)} \left[\frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_2} \right] = 1$$

Syrup.

Wenn wir nun noch berücksichtigen, dass die Spiegelung an konkaven Flächen vor sich geht, so lauten die Gleichungen, nach denen sich die Bildabstände errechnen:

$$\text{I g} \quad x_1 = \frac{-\rho_1 \rho_2 x_0 \cos e_2}{2 x_0 (\rho_1 \sin^2 \varepsilon + \rho_2 \cos^2 \varepsilon) + \rho_1 \rho_2 \cos e_2}$$

$$\text{II g} \quad x_2 = \frac{-\rho_1 \rho_2 x_0}{2 x_0 \cos e_2 (\rho_2 \sin^2 \varepsilon + \rho_1 \cos^2 \varepsilon) + \rho_1 \rho_2}$$

Ein spezieller Fall der Spiegelung im Meridian (bc) würde die Lage des leuchtenden Punktes im Mittelpunkt des Ellipsoides sein, denn in diesem Falle liegt der Einfallsstrahl, mithin auch die Einfallsebene in der Ebene des Nebennormalschnittes.

Das Azimut der Einfallsebene gegen die Ebene des Hauptnormalschnittes wird also gleich $\varepsilon = 90^\circ$.

Dadurch vereinfachen sich die Gleichungen für x_1 und x_2 in:

$$\text{I h} \quad x_1 = \frac{-x_0 \rho_2 \cos e_2}{2 x_0 + \rho_2 \cos e_2} \quad \text{und}$$

$$\text{II h} \quad x_2 = \frac{-\rho_1 x_0}{2 x_0 \cos e_2 + \rho_1}$$

Diese beiden Spezialgleichungen für den Meridian (bc) haben dieselbe Struktur wie die Gleichungen, die wir für die Hauptmeridiane (ab) und (ac) abgeleitet haben, nur dass in den neuen Gleichungen, wie voraus zu sehen, ρ_1 und ρ_2 gegenüber den früheren Gleichungen vertauscht sind.

Präzisierung unseres Problems.

Es soll nun unsere Aufgabe sein, mit Hilfe der soeben abgeleiteten Formen der Neumannschen Strahlenkoordinaten, in der

für unseren Fall zulässigen Vereinfachung, die Spiegelung im dreiaxigen Ellipsoid näher zu untersuchen.

Speziell haben wir die Annahme gemacht, dass der leuchtende Punkt in der grossen Achse des Ellipsoids gelegen ist. Unter dieser Annahme wollen wir die Spiegelung in den drei Hauptmeridianen betrachten.

Von den unendlich vielen Möglichkeiten der Lagen des leuchtenden Punktes wollen wir folgende Fälle annehmen. Zuerst möge der leuchtende Punkt im Mittelpunkt des Ellipsoides, zweitens in einem beliebigen Punkte auf der grossen Achse und drittens im Scheitelpunkte liegen.

Es besteht nun die Aufgabe, die von jeder der 3 Lagen des leuchtenden Punktes ausgehenden Strahlen nach ihrer Spiegelung in den verschiedenen Punkten der Hauptmeridiane zu verfolgen und die Lage der wegen des Astigmatismus auftretenden Brennlinien rechnerisch wie graphisch festzulegen. Als Grundlage für die beiden Hauptmeridiane (a b) und (a c), die die grosse Achse enthalten, dienen die Gleichungen:

$$x_1 = \frac{x_0 \rho_1 \cos e}{2 x_0 - \rho_1 \cos e}$$

$$x_2 = \frac{x_0 \rho_2}{2 \cos e x_0 - \rho_1}$$

Wie früher gesagt, gibt man dem Krümmungsradius das negative Vorzeichen, wenn der einfallende Strahl auf eine konkave Fläche trifft.

Unsere endgültigen, für die spätere Berechnung der Spiegelung in den Hauptmeridianen (a b) und (a c) massgebenden Formeln lauten also:

$$x_1 = \frac{-x_0 \rho_1 \cos e}{2 x_0 + \rho_1 \cos e}$$

2*

$$x_2 = \frac{-x_0 \rho_2}{2 \cos e x_0 + \rho_2}$$

Die Formeln für den dritten Hauptmeridian (b c)

$$x_1 = \frac{-x_0 \rho^2 \cos e}{2 x_0 + \rho^2 \cos e}$$

$$x_2 = \frac{-x_0 \rho_1}{2 \cos e x_0 + \rho_1}$$

Nunmehr haben wir für alle unsere zu betrachtenden Incidenzpunkte der Hauptmeridiane in jeder der drei aufgeführten Lagen des Lichtpunktes die Längen und Lagen der einfallenden Strahlen, die Lagen der Normalen und daraus den Einfallswinkel, ferner die Krümmungsradien für Haupt- und Nebennormalschnitt zu berechnen, diese Werte in unsere errechneten, vereinfachten Formeln einzusetzen und die sich ergebenden Distanzen der Brennlinien zeichnerisch darzustellen und zu betrachten.

Mathematische Ableitungen.

Unser Ellipsoid hat die Gleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Um hinsichtlich des Axenverhältnisses eine bestimmte Vorstellung zu haben, setzen wir $a > b > c$ voraus, ohne jedoch hierdurch die Allgemeinheit zu beeinträchtigen, da ein Wechsel in der Bezeichnung jederzeit vorgenommen werden kann.

Um zunächst die Gleichungen für die drei Hauptmeridiane festzustellen, setzen wir der Reihe nach $z = 0$, $y = 0$, $x = 0$ und erhalten für die Hauptschnitte die Gleichungen:

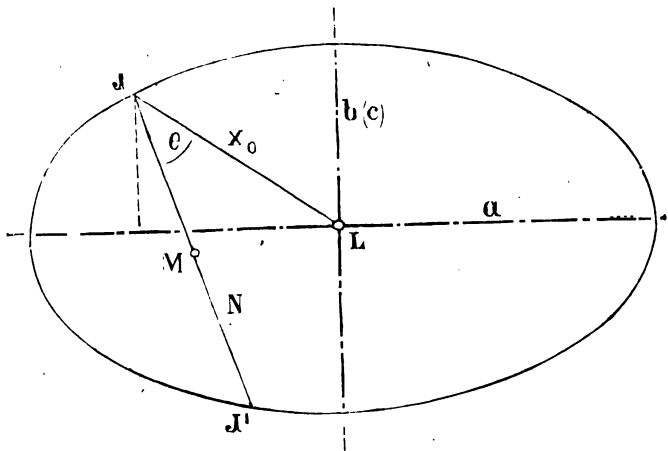
$$(a\ b) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$(a\ c) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$(b\ c) \quad \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Naturgemäss stellen diese Gleichungen Ellipsen dar. Zuerst möge die Lage des leuchtenden Punktes im Mittelpunkt des Ellipsoids betrachtet werden.

Die Spiegelung der von diesem Punkte ausgehenden Strahlen in den Hauptmeridianen (a b) und (a c) soll zunächst untersucht werden.



Die Länge des einfallenden Strahles x_0 berechnet sich als $\sqrt{x^2 + y^2}$.

Die allgemeine Gleichung für den Krümmungsradius einer Ellipse lautet:

$$\rho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right]^{3/2}}{d^2 y / dx^2}$$

angewandt auf die Ellipse (ab)

$$\rho_1 = \frac{(b^4 x^2 + a^4 y^2)^{3/2}}{a^4 b^4}$$

Schwieriger gestaltet sich die Bestimmung des Krümmungsradius des Nebennormalschnittes. Errichten wir im Incidenzpunkt eine Normale in der Ebene des Hauptnormalschnittes und legen durch diese Normale eine Ebene senkrecht zum Hauptnormalschnitt, so schneidet dieser Nebennormalschnitt das Ellipsoid in einer Fläche mit gekrümmter Begrenzung.

Mathematisch lässt sich nun durch Kombination der Gleichungen des Ellipsoids und der schneidenden Ebene nachweisen, dass jede beliebige Ebene das dreiachsig Ellipsoid in einer Ellipse schneidet.

Für uns handelt es sich darum, den Krümmungsradius der Schnittfigur, deren elliptische Gestalt wir als erwiesen voraussetzen wollen, festzulegen. Die Gleichung des Ellipsoids lautet:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c} = 1,$$

die des Hauptmeridians (ab) mit $z = 0$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{oder}$$

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2 = 0.$$

Durch Differentiation folgt aus obiger Gleichung

$$2 b^2 x dx + 2 a^2 y dy = 0$$

$$\text{oder} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$$

Die Gleichung der Normalen wird dann:

$$y' - y = \frac{a^2 y}{b^2 x} (x' - x) \text{ oder}$$

$$b^2 x y' - b^2 x y - a^2 y x' + a^2 x y = 0.$$

Kombinieren wir diese Gleichung mit der Gleichung unserer Ellipse $b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2 = 0$, so erhalten wir die Koordinaten des zweiten Schnittpunktes J' der im Incidenzpunkt errichteten Normalen mit der Ellipse. Geben wir den Koordinaten des Einfallpunktes die Indices 1 und denen des zweiten Schnittpunktes die Indices 2, so erhalten wir als Grösse der Hauptaxe der Ellipse des Nebennormalschnittes

$$J J' = J P + P J' = \frac{y_1}{\cos \alpha} - \frac{y_2}{\cos \alpha} = \frac{y_1 - y_2}{\cos \alpha}$$

mithin die Grösse der Halbachse

$$a' = \frac{y_1 - y_2}{2 \cos \alpha}.$$

Nun hätten wir noch die kleine Halbaxe der Schnittellipse zu bestimmen, legen jedoch hierzu zweckmässig erst die Koordinaten des Mittelpunktes der grossen Hauptaxe fest als

$$x_3 = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$J_3 = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Denken wir uns nun im Mittelpunkt der Normalen, in M , ein Lot auf der Hauptnormalebene errichtet, so schneidet dieses Lot das Ellipsoid. Da nun dieser Schnittpunkt ein Punkt des Ellipsoids ist, so muss er dessen Gleichung erfüllen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \text{ wobei } x = x_3, y = y_3 \text{ zu setzen ist.}$$

In dieser Gleichung ist z , die gesuchte Halbaxe b' , die einzige Unbekannte

$$z = b' = c \sqrt{1 - \frac{x_3^2}{a^2} - \frac{y_3^2}{b^2}}$$

Nachdem wir so die Axen der Ellipse des Nebennormalschnittes festgelegt haben, bestimmt sich der Krümmungsradius, da die Incidenzpunkte im Hauptmeridian liegen, und der Hauptmeridian in unserem Falle die Verbindungslinie der Scheitelpunkte der Ellipsen der Nebennormalschnitte darstellt als

$$\rho_2 = \frac{c^2 \cos \alpha [4 a^2 b^2 - b^2 (x_1 + x_2)^2 - a^2 (y_1 + y_2)^2]}{4 \cdot a^2 b^2 (y_1 - y_2)}$$

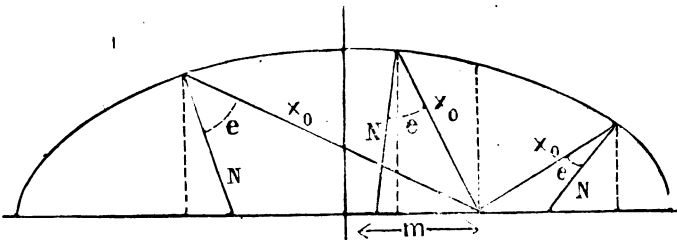
Der Einfallswinkel e berechnet sich als Differenz der Winkel β und α , die wir wiederum durch die Beziehungen kennen

$$\cos \beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} = \frac{-b^2 x}{a^2 y}$$

Jetzt wären sämtliche Werte zur Berechnung von x_1 und x_2 festgelegt für den Fall, dass der leuchtende Punkt im Mittelpunkt des Ellipsoides liegt.

Nunmehr möge sich der leuchtende Punkt um m aus dem Mittelpunkt entfernen.



Dann berechnet sich die Länge des einfallenden Strahles x_0 für die einzelnen Incidenzpunkte, deren Abscissen $x = -s$ bis $x = 0$ betragen als:

$$x_0 = \sqrt{y^2 + (x+m)^2}$$

und der Einfallswinkel als:

$$e = \beta - \alpha.$$

In dem ersten Quadranten der Ellipse und zwar für die Incidenzpunkte, deren Abscissen $x = 0$ bis $x = m$ sind, ist:

$$x_0 = \sqrt{y^2 + (m-x)^2}$$

$$e = \beta + \alpha$$

und für die Incidenzpunkte mit den Abscissen $x = m$ bis $x = a$ ist:

$$x_0 = \sqrt{y^2 + (x+m)^2}$$

$$e = \beta - \alpha.$$

Die übrigen Werte, die zur Berechnung von x_1 und x_2 nötig sind, bleiben dieselben.

Der Fall, dass der leuchtende Punkt auf der grossen Axe bis zum Scheitelpunkt des Ellipsoides fortschreitet, ist wie der erste Fall, wo der leuchtende Punkt in den Mittelpunkt des Ellipsoides fiel, also $m = 0$ wurde, ebenfalls ein Spezialfall des Falles 2, es wird dann $m = a$.

Die Gleichungen für x_0 und e lauten dann, wenn die Incidenzpunkte im zweiten Quadranten liegen, $x_0 = \sqrt{y^2 + (x+a)^2}$ und $e = \beta - \alpha$, wenn sie im ersten Quadranten liegen,

$$x_0 = \sqrt{y^2 + (a-x)^2}$$

$$e = \beta + \alpha.$$

Ganz analog, wie der Rechnungsgang im Hauptmeridian (ab) klargelegt ist, gestaltet sich die Lösung im Hauptmeridian (ac). Auch hier lassen sich die Neumannschen Gleichungen in der vereinfachten Form anwenden, und die Bestimmung der hierfür



erforderlichen Grössen ist die gleiche, nur unter Zugrundelegung der Gleichung der Ellipse des Hauptmeridians (a e)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Auch im Hauptmeridian (bc) gestaltet sich die Brechung ganz ähnlich, wenn sich der leuchtende Punkt im Mittelpunkt des Ellipsoids befindet. Wir haben diesen Fall schon bei Umformung der Neumannschen Gleichungen betrachtet.

Wesentlich umständlicher wird die Berechnung für den Fall, dass sich der leuchtende Punkt m aus der Mitte entfernt hat, denn dann fällt die Einfallsebene weder mit dem Hauptnormalschnitt noch mit dem Nebennormalschnitt zusammen, sondern das Azimut der Einfallsebene gegenüber der Ebene des Hauptnormalschnittes nimmt einen Wert zwischen 0° und 90° an.

Der Krümmungsradius im beliebigen Punkt des Hauptmeridians (bc), der zugleich Nebennormalschnitt ist, errechnet sich als

$$\rho_2 = \frac{(c^4 y^2 + b^4 z^2)^{3/2}}{b^4 c^4}$$

Ebenso finden wir durch Kombination der Gleichung der Normalen im Incidenzpunkte und der Gleichung der Ellipse (bc) die Koordinaten von J^1 und M , folglich auch die Axen der Ellipse des Hauptnormalschnittes und mithin den Krümmungsradius im Scheitelpunkt J

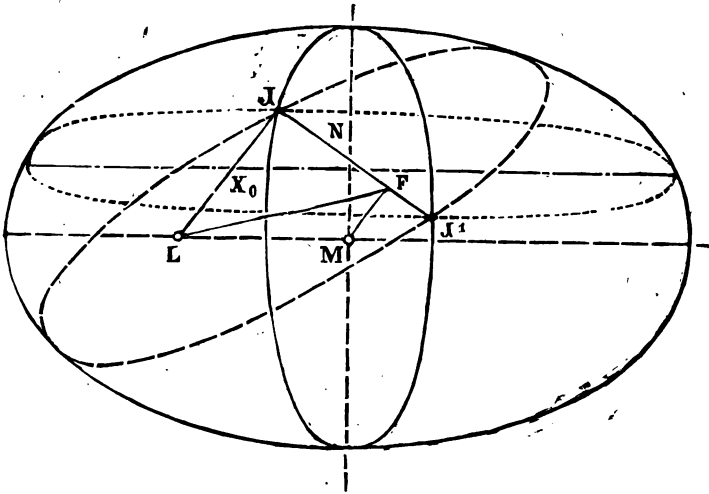
$$\delta_1 = \frac{a^2 \cos \alpha [4b^2 c^2 - c^2 (y_1 + y_2)^2 - b^2 (z_1 + z_2)^2]}{4b^2 c^2 (z_1 - z_2)}$$

Die Länge des einfallenden Strahles

$$x_0 = \sqrt{n^2 + \sqrt{y^2 + z^2}}$$

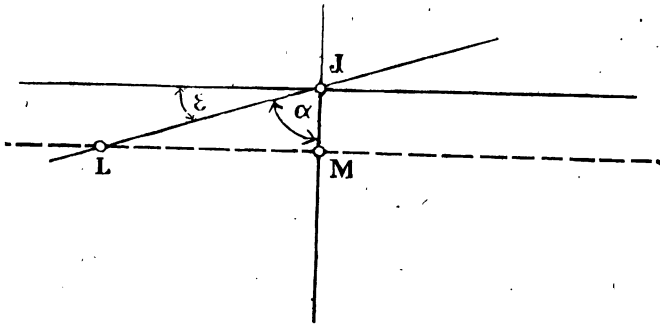
Als neuer Faktor gegenüber den früheren Berechnungen kommt jetzt noch die Bestimmung des Azimuts der Einfallsebene gegen die Ebene des Hauptnormalschnittes hinzu.

Hierzu diene nachstehende perspektivische Zeichnung.



Unser Hauptmeridian (bc), welcher im vorliegenden Falle zugleich den Nebennormalschnitt darstellt, ist in obiger Zeichnung schwarz markiert, der Hauptnormalschnitt grün und die Einfallsebene braun. Die Geraden in den einzelnen Ebenen haben wir mit den betreffenden Farben der Ebenen verzeichnet. Die Normale welche allen drei Ebenen angehört, ist schwarz dargestellt.

Denken wir uns in der Verlängerung der Normalen $J^1 J$ stehend und sehen wir in Richtung der Normalen auf das Ellipsoid, so erscheinen uns der Hauptnormalschnitt, der Nebennormalschnitt und die Einfallsebene als gerade Linien, welche sich im Incidenzpunkte schneiden.



Der Winkel, den die Spur der Einfallsebene mit der Spur des Hauptnormalschnittes bildet, ist das Azimut ε , dessen Grösse wir bestimmen wollen.

Bezeichnen wir den Winkel der Einfallsebene und der Ebene des Nebennormalschnittes mit α , dann ist $\varepsilon = 90^\circ - \alpha$.

Zur Bestimmung des Winkels α fällen wir in der Ebene des Nebennormalschnittes ein Lot auf die Normale, dessen Fusspunkt F sein möge. Dieser Punkt F ist als Punkt der Normalen zugleich ein Punkt der Einfallsebene. Die Verbindungslinie von F und dem leuchtenden Punkt L liegt mithin in der Einfallsebene. Da nun die Axe des Ellipsoids mit jedem durch M gehenden und in der Ebene des Meridians liegenden Strahl einen rechten Winkel einschliesst, so ist das Dreieck LMF bei M rechtwinklig. Schneiden sich zwei Ebenen unter einen $\sphericalangle \alpha$ und errichtet man auf der Schnittlinie in einem Punkte 2 Lote, welche je in einer der schneidenden Ebenen liegen, so schliessen diese den $\sphericalangle \alpha$ ein, mithin $\sphericalangle LFM = \sphericalangle \alpha$.

In dem rechtwinkligen Dreieck kennen wir $LM = m =$ Abstand des leuchtenden Punktes vom Mittelpunkt des Ellipsoids,

ausserdem können wir \mathcal{FM} berechnen als das vom Mittelpunkt auf die Normale im Incidenzpunkt gefällte Lot (in der Ebene des Nebennormalschnittes).

Die Gleichung für die Ellipse des Nebennormalschnittes lautet :

$$c^2 y^2 + b^2 z^2 - c^2 b^2 = 0.$$

Die Gleichung der Normalen:

$$(z' - z) = \frac{b^2 z}{c^2 y} (y' - y)$$

Die Gleichung eines Lotes auf die Normale :

$$(z' - z) = \frac{-c^2 y}{b^2 z} (y' - y)$$

Da dieses Lot durch den Mittelpunkt, in diesem Falle den Koordinatenanfangspunkt geht, so vereinfacht sich die Gleichung in :

$$z = \frac{-c^2 y}{b^2 z} \cdot y$$

$$\text{oder } b^2 z^2 + c^2 y^2 = 0.$$

Durch Kombination der Gleichung der Normalen und der des Lotes finden wir die Koordinaten von \mathcal{F} zu :

$$z_{\mathcal{F}} = \frac{c(cz' + by')}{c^2 - b^2}$$

$$y_{\mathcal{F}} = \frac{-b(cz' + by')}{c^2 - b^2}$$

Mithin ergibt sich die Länge des Lotes :

$$\begin{aligned} \mathcal{FM} &= \sqrt{z_{\mathcal{F}}^2 + y_{\mathcal{F}}^2} \\ &= \frac{c^2 z' + by'}{c^2 - b^2} \sqrt{c^2 + b^2} \end{aligned}$$

Nunmehr ergibt sich

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{m}{\mathcal{FM}} = \frac{m(e^2 - b^2)}{cz' + by'} \cdot \frac{1}{\sqrt{e^2 + b^2}}$$

$$\varepsilon = 90^\circ - \alpha$$

$$\varepsilon = \text{arc. cotg} \frac{m(c^2 - b^2)}{(cz' + by') \sqrt{c^2 + b^2}}$$

Der Einfallswinkel ε bestimmt sich aus dem Dreieck JLF ,
in dem $JL = x_0$

$$LF = \sqrt{LM^2 + FM^2}$$

$$LF = \sqrt{m^2 + \frac{(c^2 + b^2)(cz' + by')^2}{(c^2 - b^2)^2}}$$

$$e = \text{arc. sin} \sqrt{H}$$

wobei:

$$H = \frac{m^2(c^2 - b^2) + (c^2 + b^2)(cz' + by')^2}{m^2(c^2 - b^2) + (c^2 - b^2)^2(\sqrt{y^2 + z^2})^2}$$

Somit wären auch alle Werte, die der Berechnung der Bild-
distanzen im Hauptmeridian ($b c$) zu Grunde gelegt sind, festgestellt.

Rechnerische Behandlung des Problems.

Auf Grund der oben abgeleiteten Formeln wollen wir eine
numerische Berechnung für ein bestimmtes Ellipsoid vornehmen.

Unser gewähltes Ellipsoids habe die drei Hauptaxen $a =$
80 mm, $b = 40$ mm, $c = 30$ mm.

Zur Berechnung der nachstehenden Tabellen wurden folgende,
im vorigen Kapitel abgeleitete Formeln benutzt:

Hauptmeridian ($a b$).

Die Werte für x wurden angenommen.

$$y = \sqrt{\frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)}$$

$$x_0 = \sqrt{y^2 + (x+m)^2} \quad \text{resp.} \quad \sqrt{y^2 + (m-x)^2}$$

$$\rho_1 = \frac{(b^4 x + a^4 y^2)^{3/2}}{a^4 b^4}$$

$$\rho_2 = \frac{c^2 \cos \alpha [4 a^2 b^4 - b^2 (x_1 + x_2)^2 - a^2 (y^1 + y^2)^2]}{4 a^2 b^3 (y^1 - y^2)^2}$$

$$e = \beta + \alpha \quad \text{resp.} \quad \beta - \alpha$$

$$x^1 = \frac{-x_0 \rho_1 \cos e}{2 x_0 + \rho_1 \cos e}$$

$$x_2 = \frac{-x_0 \rho_2}{2 \cos e x_0 + \rho_2}$$

Hauptmeridian (a c).

$$z = \sqrt{\frac{c^2}{a^2} (a^2 - x^2)}$$

$$x_0 = \sqrt{z^2 + (x+m)^2} \quad \text{resp.} \quad \sqrt{z^2 + (m-x)^2}$$

$$\rho_1 = \frac{(e^4 x^2 + a^4 z^2)^{3/2}}{a^4 c^4}$$

$$\rho_2 = \frac{b^2 \cos \alpha [4 a^2 e^4 - e^2 (x_1 + x_2)^2 - a^2 (z_1 + z_2)^2]}{4 a^2 c^2 (z^1 - z_2)}$$

$$e = \beta + \alpha \quad \text{resp.} \quad \beta - \alpha$$

$$x_1 = \frac{-x_0 \rho_1 \cos e}{2 x_0 + \rho_1 \cos e}$$

$$x_2 = \frac{x_0 \rho_2}{2 \cos e x_0 + \rho_2}$$

Hauptmeridian (b c).

Die Werte von y wurden angenommen

$$z = \sqrt{\frac{c^2}{b^2} (b^2 - y^2)}$$

$$x_0 = \sqrt{m^2 + \sqrt{y^2 - z^2}}$$

$$\rho_1 = \frac{a^2 \cos \alpha [4 b^2 c^2 - c^2 (y_1 + y_2)^2 b^2 (z_1 + z_2)^2]}{4 b^2 c^2 (z_1 - z_2)}$$

$$\rho_2 = \frac{(c^4 y^2 + b^4 z^2)^{3/2}}{b^4 c^4}$$

$$e = \arcsin \sqrt{\frac{m^2 (c^2 - b^2) + (c^2 + b^2) (cz^1 + by^1)^2}{m^2 (c^2 - b^2) + (c^2 - b^2)^2 \sqrt{y^2 + c^2}}}$$

$$x_1 = \frac{\rho_1 \rho_2 x_0 \cos e_2}{2 x_0 (\rho_1 \sin^2 e + \rho_2 \cos^2 e) + \rho_1 \rho_2 \cos e_2}$$

$$x_2 = \frac{-\rho_1 \rho_2 x_0}{2 x_0 \cos e_2 (\rho_2 \sin^2 e + \rho_1 \cos^2 e) + \rho_1 \rho_2}$$

Tabelle I.
Spiegelung im Hauptmeridian (a b)
Leuchtende Punkt im Mittelpunkt des
Ellipsoids.

x	y	x_0	ρ_1	ρ_2	$\cos e$	x_1	x_2
0,00	4,00	4,00	16,00	2,250	1,000	-2,666	-0,879
0,50	3,99	4,02	15,92	2,256	0,997	-2,668	-0,884
1,00	3,97	4,10	15,72	2,260	0,986	-2,691	-0,917
2,00	3,87	4,36	14,93	2,180	0,939	-2,749	-0,971
3,00	3,71	4,77	13,60	2,201	0,886	-2,672	-0,981
4,00	3,46	5,29	11,75	2,063	0,853	-2,529	-0,987
5,00	3,12	5,90	9,52	1,902	0,797	-2,480	-1,000
6,00	2,65	6,56	7,03	1,897	0,793	-2,171	-1,015
7,00	1,94	7,26	4,52	1,488	0,843	-1,612	-0,789
7,40	1,52	7,55	3,43	1,326	0,877	-1,354	-0,688
7,70	1,09	7,78	2,69	1,239	0,937	-1,180	-0,613
8,00	0,00	8,00	2,00	1,125	1,000	-0,894	-0,525

Tabelle II.
Spiegelung im Hauptmeridian (a c)
Leuchtende Punkt im Mittelpunkt des
Ellipsoids.

x	x_0	z	ρ_1	ρ_2	$\cos e$	x_1	x_2
0,00	3,000	3,000	21,333	5,341	1,00000	-2,348	-1,413
0,50	3,033	2,999	21,115	5,342	0,99367	-2,358	-1,425
1,00	3,140	2,976	20,830	5,348	0,97284	-2,374	-1,468
2,00	3,527	2,905	19,586	4,982	0,88680	-2,591	-1,633
3,00	4,090	2,780	15,524	4,695	0,80558	-2,785	-1,801
4,00	4,770	2,598	14,801	4,351	0,75050	-2,568	-1,796
5,00	5,521	2,341	11,500	3,798	0,73924	-2,450	-1,757
6,00	6,320	1,985	7,918	3,046	0,75462	-2,127	-1,796
7,00	7,149	1,453	4,242	2,600	0,81866	-1,395	-1,411
7,40	7,487	1,142	2,898	2,408	0,86719	-1,075	-1,201
7,60	7,743	0,814	1,953	2,408	0,92466	-0,809	-1,114
8,00	8,000	0,000	1,125	2,000	1,00000	-0,525	-0,894

Syrup.

3

Tabelle III.

Spiegelung im Hauptmeridian (a b)
Leuchtende Punkt auf der großen Axe,
2 cm vom Mittelpunkt entfernt.

x	y	x_0	ρ_1	ρ_2	$\cos c$	x_1	x_2
-8,00	0,00	10,00	2,00	1,125	1,000	-0,909	-0,527
-7,70	1,09	9,76	2,69	1,239	0,919	-1,100	-0,630
-7,40	1,52	9,52	3,43	1,326	0,860	-1,231	-0,706
-7,00	1,94	9,21	4,52	1,488	0,811	-1,521	-0,836
-6,00	2,65	8,54	7,03	1,897	0,747	-2,023	-1,109
-5,00	3,12	7,66	9,52	1,902	0,717	-2,374	-1,139
-4,00	3,46	6,93	11,75	2,063	0,721	-2,63	-1,223
-3,00	3,71	6,22	13,60	2,201	0,751	-2,74	-1,187
-2,00	3,87	5,57	14,93	2,180	0,792	-2,87	-1,121
-1,00	3,97	4,975	15,72	2,260	0,822	-2,803	-1,063
-0,50	3,99	4,71	15,92	2,256	0,869	-2,800	-1,015
0,00	4,00	4,47	16,00	2,250	0,869	-2,750	-0,971
+0,50	3,99	4,26	15,92	2,256	0,950	-2,722	-0,928
+0,10	3,97	4,09	15,72	2,260	0,977	-2,684	-0,851
+2,00	3,87	3,87	14,93	2,180	0,992	-2,661	-0,846
+3,00	3,71	3,84	13,60	2,201	0,980	-2,443	-0,829
+4,00	3,46	4,00	11,75	2,063	0,957	-2,345	-0,849
+5,00	3,12	4,33	9,52	1,902	0,925	-2,186	-0,832
+6,00	2,65	4,80	7,03	1,897	0,890	-1,891	-0,874
+7,00	1,94	5,36	4,52	1,488	0,892	-1,462	-0,765
+7,40	1,52	5,61	3,43	1,326	0,912	-1,231	-0,651
+7,70	1,09	5,80	2,69	1,239	0,947	-1,026	-0,588
+8,00	0,00	6,00	2,00	1,125	1,000	-0,857	-0,514

Tabelle IV.
Spiegelung im Hauptmeridian (α)
Leuchtende Punkt auf der großen Axe
2 cm vom Mittelpunkt entfernt.

x	z	x_0	ρ_1	ρ_2	$\cos e$	x_1	x_2
-8,00	0,000	10,000	1,125	2,000	1,000	-0,527	-0,909
-7,70	0,814	9,734	1,953	2,408	0,9164	-0,758	-1,156
-7,40	1,142	9,362	2,898	2,600	0,8508	-1,076	-1,324
-7,00	1,453	9,117	4,242	3,046	0,8054	-1,333	-1,565
-6,00	1,985	8,243	7,918	3,798	0,6898	-2,043	-2,051
-5,00	2,341	7,381	11,500	4,351	0,6558	-2,043	-2,051
-4,00	2,598	6,538	14,801	4,695	0,6304	-2,409	-2,363
-3,00	2,780	5,721	15,524	4,982	0,6396	-2,863	-2,322
-2,00	2,905	4,944	19,586	5,387	0,6783	-2,933	-2,281
-1,00	2,976	4,226	20,830	5,348	0,7486	-2,672	-1,978
-0,50	2,999	3,899	21,115	5,342	0,7642	-2,625	-1,879
+0,00	3,000	3,605	21,333	5,341	0,7696	-2,542	-1,772
+0,50	2,999	3,347	21,115	5,342	0,9113	-2,487	-1,783
+1,00	2,976	3,140	20,830	5,348	0,9981	-2,411	-1,651
+2,00	2,905	2,905	19,586	5,387	0,9930	-2,286	-1,520
+3,00	2,780	2,955	17,544	4,981	0,9874	-2,198	-1,462
+4,00	2,598	3,279	14,801	4,695	0,9276	-2,181	-1,474
+5,00	2,341	3,805	11,500	4,351	0,8704	-2,161	-1,512
+6,00	1,985	4,465	7,918	3,798	0,8429	-1,911	-1,500
+7,00	1,453	5,206	4,242	3,046	0,8039	-1,322	-1,291
+7,40	1,142	5,519	2,898	2,600	0,8929	-1,286	-1,073
+7,70	0,814	5,756	1,953	2,408	0,9373	-1,079	-0,952
+8,00	0,000	6,000	1,125	2,000	1,0000	-0,514	-0,857

Tabelle V.
Spiegelung im Hauptmeridian (a b)
Leuchtende Punkt im Scheitel des Ellipsoids.

X	Y	x_0	ρ_1	ρ_2	$\cos e$	x_1	x_2
-8,00	0,000	16,00	2,00	1,125	1,000	-0,941	-0,544
-7,70	1,09	15,75	2,69	1,239	0,903	-1,361	-0,820
-7,40	1,52	15,48	3,43	1,326	0,827	-1,506	-0,944
-7,00	1,94	15,10	4,52	1,488	0,759	-1,692	-1,122
-6,00	2,65	14,28	7,03	1,897	0,642	-1,943	-1,241
-5,00	3,12	13,40	9,52	1,902	0,585	-2,304	-1,448
-4,00	3,46	12,51	11,75	2,063	0,542	-2,547	-1,659
-3,00	3,71	11,60	13,60	2,201	0,497	-2,721	-1,870
-2,00	3,87	10,72	14,93	2,180	0,482	-2,711	-1,910
-1,00	3,97	9,84	15,72	2,260	0,472	-2,695	-1,982
-0,50	3,99	9,43	15,92	2,256	0,464	-2,681	-1,929
± 0,00	4,00	8,96	16,00	2,250	0,449	-2,561	-1,955
+0,50	3,99	8,54	15,92	2,256	0,431	-2,524	-1,946
+1,00	3,97	8,37	15,72	2,260	0,409	-2,321	-1,920
+2,00	3,87	7,24	14,93	2,180	0,425	-2,204	-1,906
+3,00	3,71	6,23	13,60	2,201	0,423	-1,973	-1,769
+4,00	3,46	5,29	11,75	2,063	0,421	-1,698	-1,675
+5,00	3,12	4,31	9,52	1,902	0,420	-1,372	-1,551
+6,00	2,65	3,32	7,03	1,897	0,401	-1,012	-1,371
+7,00	1,94	2,21	4,52	1,488	0,342	-0,586	-1,098
+7,40	1,52	1,64	3,43	1,326	0,306	-0,383	-0,753
+7,70	1,09	1,12	2,69	1,239	0,284	-0,256	-0,543
8,00	0,00	0,00	2,00	1,125	0,000	± 0,000	± 0,000

Tabelle VI.
Spiegelung im Hauptmeridian (a c)
Leuchtende Punkt im Scheitel des Ellipsoids.

X	Z	X ₀	ρ ₁	ρ ₂	cos ε	X ₁	X ₂
-8,00	0,000	16,000	1,125	2,000	1,000	-0,544	-0,941
-7,70	0,814	15,721	1,953	2,408	0,8306	-0,763	-1,324
-7,40	1,142	15,442	2,898	2,600	0,7254	-0,977	-1,685
-7,00	1,453	15,071	4,242	3,046	0,6388	-1,235	-2,063
-6,00	1,985	14,174	7,918	3,798	0,5150	-1,826	-2,924
-5,00	2,341	13,206	11,500	4,351	0,4514	-2,303	-3,541
-4,00	2,598	12,276	14,801	4,695	0,4147	-2,438	-4,672
-3,00	2,780	11,336	15,524	4,982	0,3881	-2,804	-4,102
-2,00	2,905	10,413	19,586	5,387	0,3692	-3,766	-4,211
-1,00	2,976	9,476	20,830	5,348	0,3665	-2,659	-4,152
-0,50	2,999	9,011	21,110	5,342	0,3556	-2,649	-4,142
± 0,00	3,000	8,544	21,335	5,341	0,3529	-2,602	-4,082
+ 0,50	2,999	8,075	21,115	5,342	0,3502	-2,841	-4,121
+ 1,00	2,976	7,606	20,830	5,348	0,3447	-2,801	-4,251
+ 2,00	2,905	6,666	19,586	5,387	0,3475	-2,323	-3,568
+ 3,00	2,780	5,721	17,524	4,982	0,3501	-2,109	-3,178
+ 4,00	2,598	4,769	14,801	4,695	0,3556	-1,695	-2,741
+ 5,00	2,341	3,805	11,500	4,351	0,3746	-1,372	-2,306
+ 6,00	1,985	2,818	7,918	3,798	0,3719	-0,903	-1,731
+ 7,00	1,453	1,764	4,242	3,046	0,3665	-0,597	-1,236
+ 7,40	1,142	1,288	2,898	2,600	0,3692	-0,478	-0,943
+ 7,70	0,814	0,866	1,952	2,408	0,2868	-0,258	-0,615
+ 8,00	0,000	0,000	1,125	2,000	0,0000	± 0,000	∓ 0,000

Tabelle VII.
Spiegelung im Hauptmeridian (6 c)
Leuchtende Punkt im Mittelpunkt des
Ellipsoids.

y	z	x_0	ρ_1	ρ_2	$\cos \epsilon$	x_1	x_2
0,00	3,000	3,000	21,333	5,341	1,000	-2,348	-1,413
1,00	2,898	3 666	20,981	5,100	0,991	-2,384	-1,357
2,00	2,598	3,281	20,038	4,493	0,975	-2,476	-1,315
3,00	1,985	3,592	18,376	3,504	0,963	-2,593	-1,152
4,00	0,000	4,000	16,000	2,250	1,000	-2,666	-0,879

Tabelle VIII.
 Spiegelung im Hauptmeridian (6 c)
 Leuchtende Punkt auf der großen Axe 2 cm vom
 Mittelpunkt.

Y	Z	X ₀	ρ ₁	ρ ₂	cos ε	sin ² ε	cos ² ε	X ₁	X ₂
0,00	3,000	3,606	21,333	5,341	0,7696	0,0000	1,0000	-2,542	-1,772
1,00	2,898	3,666	20,981	5,100	0,7964	0,0448	0,9559	-2,481	-1,756
2,00	2,598	3,841	20,038	4,493	0,8164	0,1439	0,8550	-2,264	-1,710
3,00	1,985	4,116	18,376	3,504	0,8548	0,1263	0,8773	-2,380	-1,465
4,00	0,000	4,472	16,000	2,250	0,8695	0,0000	1,0000	-2,750	-0,971

Tabelle IX.
 Spiegelung im Hauptmeridian (6 c)
 Leuchtende Punkt im Scheitel des Ellipsoids.

Y	Z	X ₀	ρ ₁	ρ ₂	cos c	sin ² ε	cos ² ε	X ₁	X ₂
0,00	3,000	8,544	21,333	5,341	0,3529	0,0000	1,0000	-2,602	-4,082
1,00	2,898	8,567	20,981	5,100	0,3385	0,0000	1,0000	-2,501	-3,908
2,00	2,598	8,646	20,038	4,493	0,3677	0,1138	0,9896	-2,478	-3,379
3,00	1,985	8,772	18,376	3,504	0,4036	0,0089	0,9910	-2,529	-2,911
4,00	0,000	8,961	16,000	2,250	0,4494	6,0000	1,0000	-2,560	-1,955

Bemerkungen zu den Tabellen und Tafeln.

In den einzelnen Scheitelpunkten des Ellipsoids schneiden sich je zwei Hauptmeridiane. Die Bildabstände x_1 und x_2 in diesen zu einem Scheitelpunkt gehörigen Hauptmeridianen müssen für den Scheitelpunkt als Incidenzpunkt und für ein und dieselbe Lage des leuchtenden Punktes dieselben sein.

Diese betreffenden Werte sind in den Tabellen fett gedruckt.

Die Werte für x_1 und x_2 der Tabellen sind in den Tafeln verzeichnet und die Punkte zu Kurven verbunden worden, über deren Verlauf wir weiter unten sprechen wollen. Die Zusammenstellung der Figuren auf den Tafeln hat nach den einzelnen Lagen des leuchtenden Punktes stattgefunden. Nur die Spiegelung im Hauptmeridian (b c) ist besonders auf einer Tafel verzeichnet und zwar aus folgendem Grunde. In den Tafeln I—IV liegen die zurückgeworfenen Strahlen in der TafelEbene.

Die Kurven stellen also die absoluten Werte der Tabellen dar. In Tafel V liegen die Bildpunkte jedoch nicht in der Ebene der Tafel, sodass die verzeichneten Kurven nur die Projektionen der Raumkurven darstellen.

Der bestimmte Verlauf der Bildkurven, welche wir bei der Spiegelung im Ellipsoid erhielten, veranlasste uns unsere Untersuchungen auch auf das Ellipsoid als Konvexspiegel auszudehnen. Zum Verständnis der Tafel IV sei kurz erwähnt, dass bei der Lage des leuchtenden Punktes ausserhalb des Ellipsoids und ein Teil des spiegelnden Körpers getroffen wird, im günstigsten Falle, bei der Lage des leuchtenden Punktes in unendlicher Ferne die Hälfte. Eine Spiegelung im Meridian (b c) kommt bei endlicher Lage des leuchtenden Punktes überhaupt nicht in Betracht, da die

Strahlen den Meridian nicht treffen. Für die Lage des leuchtenden Punktes im Unendlichen werden die Bildabstände

$$x_1 = 0; x_2 = \infty.$$

Der Verlauf der für diese Lagen des leuchtenden Punktes ausserhalb des Ellipsoids erzielten Bildkurven haben einen so wenig einfachen Verlauf, grösstenteils von rein imaginärer Bedeutung, dass wir uns nicht für befugt halten, auf Grund der Ergebnisse der Spiegelung in den Hauptmeridianen allein irgendwelche Beziehungen aufzustellen.

Eine Betrachtung der zwischen den Hauptmeridianen liegenden Meridiane würde uns jedoch zu weit führen und den Rahmen dieser vorliegenden Arbeit überschreiten.

Wir legen also unseren nachfolgenden Betrachtungen nur die Spiegelung innerhalb des Ellipsoids zu Grunde.

Betrachtung der Ergebnisse unserer Untersuchung.

Hätten wir es mit der Spiegelung eines leuchtenden Punktes in einem ebenen Spiegel zu tun, so würden alle von dem leuchtenden Punkte ausgehenden Strahlen derartig zurückgeworfen werden, als ob sie von einem ebensoweit hinter dem Spiegel liegenden Punkte, von dem virtuellen Bilde, ausgingen. Bei der Spiegelung in sphärischen Flächen tritt nun, wie früher gesagt, eine sphärische Aberration auf. Das virtuelle Bild des leuchtenden Punktes ist kein punktuell mehr, sondern bildet einen tetraedrischen leuchtenden Raum, indem wir zwei Maxima von Helligkeiten wahrnehmen können. Diese Maxima haben wir für

ein Wert, der mit dem aus unserer Rechnung sich ergebenden zusammenfällt. Aus der Tabelle 2 sehen wir weiter, dass der Wert von ρ_2 nach dem Zusammenfallen der x_2 und x_1 Punkte grösser bleibt, folglich werden wir es in dem Punkte, in dem der Aplanatismus auftritt, wirklich, wie auch die Figur zeigt, mit einem Schnitt und nicht mit einer Schmiegunq zu tun haben.

Die Figuren 4 und 5 auf Tafel II bilden eine weitere Bestätigung unserer Überlegung.

Die Differenz der Grössen der Krümmungsradien ist wieder im Incidenspunkt $x = 0$ ein Maximum. Figur 3 und 4 zeigen dass auf der Verlängerung des im Punkte $x = 0$ reflektierten Strahles die Entfernung der Maxima der Helligkeiten ein Maximum ist. Die Maxima der einzelnen Kurven x_2 und x_1 haben sich aus der Mitte seitwärts nach dort verschoben, wo der Einfallswinkel und der einfallende Strahl ein Minimum wird. Die beiden Punkte, in denen Aplanatismus auftritt, genügen den Bedingungengleichungen indem:

$$\cos \epsilon = \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}}$$

im einen Punkte

$$\sqrt{\frac{3,918}{8,542}} = 0,6781$$

im anderen Punkte

$$\sqrt{\frac{3,123}{4,742}} = 0,8112$$

Werte ergibt, die mit unserer Rechnung übereinstimmen.

Versuchen wir die Richtigkeit unserer Behauptung auch für den Fall zu prüfen, wo der leuchtende Punkt im Scheitelpunkt

des Ellipsoides liegt, so kommt hier die früher gemachte Einschränkung des „relativen Maximums“ in Betracht.

In dem Punkte, wo nämlich x_0 und e ein Minimum werden, fallen x_1 und x_2 mit dem Incidenzpunkte zusammen, sodass wir absolut genommen in diesem Punkte von keinem Maximum sprechen können. Aber gerade der herzförmige Verlauf der Kurven deutet darauf hin, dass in dem Punkte, wo x_0 und e gleich 0 wird, in unserem Falle im Scheitelpunkt ein relatives Maximum auftritt, das allerdings hier unendlich klein wird.

Die Behauptung, dass das Maximum der Entfernung wieder auf dem von dem Punkte reflektierten Strahle liegt, in welchem die Differenz von ρ_1 und ρ_2 ein Maximum wird, finden wir durch die Figur 6 auf Tafel III ohne weiteres bestätigt. Dass Figur 5 die aufgestellte Bedingung nicht erfüllt, liegt an der dem Hauptmeridian (a b) für diese Lichtstellung speziell eigentümlichen Bedingungen, wonach der Verlauf der Kurven dadurch verändert wird, dass Aplanatismus auftritt.

Die Notwendigkeit des Auftretens des Aplanatismus finden wir wieder durch die Erfüllung der Bedingungsgleichung bestätigt:

$$\cos e = \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}} = \sqrt{\frac{1,955}{11,124}} = 0,419,$$

auch dieser Wert entspricht unserer Rechnung.

Die Figuren 7 und 8 auf Tafel V bestätigen unsere Annahmen ohne weiteres, für den Verlauf der Kurven der Figur 9 ist wieder das Auftreten des Aplanatismus Ausschlag gebend.



Zum Schluss möchte ich nicht verfehlen, Herrn Prof. Dr. phil. et. med. L. Matthiessen für die gütige Anregung zur vorliegenden Arbeit und Herrn Prof. Dr. Wachsmuth für die liebenswürdige Unterstützung und die Übernahme des Referats meinen ergebensten Dank auszudrücken.



11
2776

YC 11199

Syrup

166179

QC335
S9 L

